CORRIGÉ DE LA FEUILLE nº 3

Exercice 1

1. ***a.*** $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \det M \neq 0\}$. Comme le déterminant est une fonction polynomiale (donc continue), $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert. Il s'écrit comme réunion disjointe de $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et de $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$, ces deux ensembles ouverts correspondant respectivement aux matrices de déterminant strictement positif et strictement négatifs. Vérifions qu'ils sont tous deux connexes.

On sait que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est engendré par les dilatations et les transvections. Une transvection non triviale s'écrit $x \mapsto x + \varphi(x)v$ où φ est une forme linéaire et $v \in \ker\varphi$. On peut relier continument cette transvection à l'identité par le chemin continu $x \mapsto x + t\varphi(x)v$. On en déduit que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. On prend maintenant une matrice A dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ on peut écrire $A = \mathrm{diag}(\det M, 1, \dots, 1) \times B$ où $B \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. On peut alors relier continument B à l'identité, et le premier facteur à $\mathrm{diag}(\pm 1, 1, \dots, 1)$. Ceci montre que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ a au plus deux composantes connexes, celles de $\mathrm{diag}(\pm 1, 1 \dots, 1)$.

Ceci montre que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs. Comme ce sont des ouverts, ce sont les deux composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

b. Soit A une matrice de rang p. Il existe alors deux matrices P et Q inversibles telles que $PAQ = \mathrm{diag}(1^p, 0^{n-p})$. Quitte à multiplier P ou Q par $\mathrm{diag}(1^{n-1}, -1)$ ce qui ne change pas l'équation précédente, on peut supposer que P et Q sont de déterminant > 0. Comme $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, ont peut trouver deux chemins continus $t \longrightarrow P_t$ et $t \longrightarrow Q_t$ de $[0, 1]$ dans $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ tels que $P_0 = P, Q_0 = Q$ et $P_1 = Q_1 = \mathrm{I}_n$. Dans ce cas, $t \longrightarrow P_tAQ_t$ est un chemin continu dans M_p reliant A à $\mathrm{diag}(1^p, 0^{n-p})$.

c. L'ensemble $\cup_{q \leq p} M_q$ est la réunion des ensembles de matrices ayant un mineur donné $p \times p$ inversible (donc de déterminant non nul). Chacun de ces ensembles est ouvert car l'application $M \longrightarrow \det M_{I,J}$ est continue, donc la réunion l'est aussi.

d. On a $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) = \big(\cup_{q \leq p} M_q\big) \cup \big(\cup_{q > p} M_q\big)$. L'union étant disjointe le premier terme est un fermé. On en déduit l'inclusion $\overline{M}_p \subset \cup_{q \leq p} M_q$. Reste à prouver l'inclusion en sens inverse, à savoir que si $q \leq p, M_q \subset \overline{M}_p$. Pour ceci, si A est dans M_q, il existe P et Q inversibles telles que $A = P\mathrm{diag}(1^q, 0^{n-q})Q$. On considère alors la courbe continue $\gamma \colon t \mapsto P\mathrm{diag}(1^q, t^{p-q}, 0^{n-p})Q$. Si $t \neq 0$, $\gamma(t) \in M_p$, et $\gamma(0) = A$. On en déduit que $A \in \overline{M}_p$.

Exercice 2

1. L'inclusion $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_d) \subset \{u \in E^*, u_{|F} = 0\}$ est claire. Pour la réciproque, on fait une récurrence sur d.

Initialisation : $d = 1$. Supposons $u_{|\ker u_1} = 0$. Si $u_1 = 0$, $u = 0$ et il n'y a rien à montrer. Si $u_1 \neq 0$, alors pour tout vecteur v hors de $\ker u_1$, $E = \ker u_1 \oplus \mathbf{k}v$. Si $\lambda \in \mathbf{k}$, la forme linéaire $u - \lambda u_1$ nulle sur $\ker u_1$ et vaut $u(v) - \lambda u_1(v)$ en v. Si $\lambda = u(v)/u_1(v)$, on en déduit $u = \lambda u_1$.

Supposons maintenant l'énoncé vrai pour $d - 1$. Si $\cap_{i \leq d} \ker u_i = \cap_{i \leq d-1} \ker u_i$, il n'y a rien à montrer. Sinon, en appliquant le même argument, on a $\cap_{i \leq d-1} \ker u_i = \cap_{i \leq d} \ker u_i \oplus \mathbf{k}v$ pour tout vecteur v dans $\cap_{i \leq d-1} \ker u_i$ tel que $u_d(v) \neq 0$. On peut alors trouver λ dans $\mathbf{k}$ tel que $u - \lambda u_d$ s'annule sur v. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence) $u - \lambda u_d$: cet élément est dans $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{d-1})$. On en déduit le résultat.

Preuve alternative. On peut extraire de $(u_1, \dots, u_d)$ une base de $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_d)$. Quitte à renuméroter les u_i, on peut supposer qu'il s'agit des r premiers vecteurs $u_1, \dots u_r$. Vérifions que $F = \cap_{i=1}^r \ker u_i$. On a évidemment l'inclusion $F \subset \cap_{i=1}^r \ker u_i$. En sens inverse, soit $p > r$. Alors on peut écrire $u_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$ donc $\cap_{i=1}^r \ker u_i \subset \ker u_p$. Ceci est également vrai pour $p \leq r$. En faisant l'intersection pour toutes les valeurs de p, on obtient l'inclusion inverse. Ceci montre qu'on peut supposer sans perte de généralité que $u_1, \ldots, u_d$ est une famille libre, car l'extraction d'une base ne change pas le sous-espace vectoriel F associé. On peut alors compléter les u_i en une base, et prendre la base pré-duale associée $(e_1, \ldots, e_n)$ telle que pour $i \leq p$, $u_i = e_i^*$. Alors $F = \mathrm{Vect}(e_{d+1}, \ldots, e_n)$. Choisissons maintenant une forme linéaire u telle que $u_{|F} = 0$. On écrit $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*$. Alors $u(e_k) = 0$ pour $k > d$ donc $\alpha_{d+1} = \ldots = \alpha_n = 0$. On en déduit que u appartient à $\mathrm{Vect}(e_1^*, \ldots, e_d^*) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_d)$.

2. Soit G un supplémentaire de F. Alors $\{u \in E^*, u_{F|} = 0\} \simeq G^*$. On en déduit $\dim \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_d) = \dim G^* = \dim G = \dim E - \dim F$.

Exercice 3

1. ***a.*** Démontrer que E est un $\mathbf{k}$-espace vectoriel comme quotient de $\mathbf{k}$-espaces vectoriels. Comme $\mathbf{k}_{N-1}[X] \cap (P) = \{0\}$, on a une injection $\mathbf{k}_{N-1}[X] \hookrightarrow E$. D'autre part, si $A \in \mathbf{k}[t]$, on peut écrire $A = PQ + R$ où $R \in \mathbf{k}_{N-1}[X]$ donc $A = R$ dans E, ce qui montre que $E \simeq \mathbf{k}_{N-1}[t]$. E est donc de dimension N, une base naturelle est $A, t, \ldots, t^{N-1}$.

b. La multiplication par t sur $\mathbf{k}[t]$ est $\mathbf{k}$-linéaire, et laisse stable l'idéal (P), elle passe donc au quotient en une application $\mathbf{k}$-linéaire.

c. Soit Q un polynôme tel que $Q(m_t) = 0$. Par définition cela signifie que $Q(t) = 0$ dans E, c'est-à-dire que P divise Q. P est donc le polynôme minimal de m_t.

2. ***a.*** Écrivons $P(X) = X^N + a_{N-1}X^{N-1} + \ldots + a_0$. La matrice de m_t est donc égale à

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{N-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{N-1} \end{pmatrix}$$

b. On doit donc calculer

$$\begin{vmatrix} \lambda & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & a_{N-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda + a_{N-1}. \end{vmatrix}.$$

On développe par rapport à la dernière colonne, et le mineur correspondant au coefficient $(-1)^{n+k-1}a_k$ est formé de deux matrices $k \times k$ et $(n-k-1) \times (n-k) - 1$, la première étant triangulaire inférieure avec diagonale λ et la seconde triangulaire supérieure avec diagonale -1. Le déterminant du mineur est donc $\lambda^k (-1)^(n-k-1)$, ce qui produit le terme $a_k \lambda^k$. On en déduit le résultat.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbf{k}$ et u un endomorphisme de E.

1. Si $P, Q \in \mathbf{k}[t]$ sont deux polynômes premiers entre eux, démontrer que $\ker PQ(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$.

2. Généraliser à un nombre arbitraire de polynômes

Exercice 5

1. *a.* $\langle x\rangle$ est stable par u car $u(Q(u)) = (tQ)(u)$. I_x est un idéal de $\mathbf{k}[t]$ car $(Q_1Q_2)(u)(x) = Q_1(u)(Q_2(u)(x))$.

   b. On a $\langle x\rangle \simeq \mathbf{k}[t]/(P_x)$ et on applique la Q1 de l'exercice 3 .

2. *a.* L'idéal I_x contient l'idéal annulateur de u, qui est (P). On en déduit que P_x divise P.

   b. Les $P_i^{r_i}$ sont premiers entre eux, donc par le résultat de l'exercice 4, $E = \ker P(u) = \bigoplus_i \ker P_i^{r_i}(u)$.

   Supposons maintenant que pour tout x de E, $I_x \neq P_i^{r_i}$. Soit $x \in \ker P_i^{r_i}(u)$. Alors $P_i^{r_i} \in I_x$ donc $I_x = P_i^k$ pour un $k \leq r_i$. Comme $k \neq r_i$ est exclu, $k \leq r_i - 1$. En particulier, $x \in \ker P_i^{r_i-1}$. On obtient donc $E = \bigoplus_j \ker P_j^{r_j-\delta_{ij}}$ et donc en appliquant l'exercice 4 à nouveau, $\prod_j P_j^{r_j-\delta_{ij}}$ est un polynôme annulateur de u. Comme ce polynôme est un diviseur strict du polynôme minimal P, on obtient une contradiction.

   c. Pour tout i on choisit un x_i tel que $I_{x_i} = (P_i)^{r_i}$, et on considère $x = \sum_i x_i$. Supposons que $Q(u)(x) = 0$. Alors pour tout i, $Q(u)(x_i) = 0$ donc $Q \in I_{x_i}$, et par suite $P_i^{r_i}|Q$. Comme les $P_i^{r_i}$ sont premiers entre eux, Q est multiple de P, donc $I_x = (P)$.

   d. On peut établir le dictionnaire suivant :

groupe abélien fini G	espace vectoriel E + endomorphisme u
$g \in G$	$x \in E$
H sous-groupe de G	$V \subset E$ sev stable par u
$g \to g^n, n \in \mathbb{Z}$	$x \to P(u)(x), P \in \mathbf{k}[t]$
d = exposant de G	P = polynôme minimal de u
$\mathrm{ord}(g)$	P_x
$d = \prod_i p_i^{r_i}$	$P = \prod_i P_i^{r_i}$
$G = \prod_i G(p_i^{r_i})$	$E = \bigoplus_i \ker P_i^{r_i}(u)$

   On voit ainsi que la preuve qu'on a donnée est exactement la preuve du cours établissant que dans tout groupe fini G, il existe un élément g donc l'ordre est l'exposant du groupe.

3. *a.* Soit F un supplémentaire de $\langle x\rangle$. Comme $\langle x\rangle$ est stable par u, on voit que la matrice de $\lambda \mathrm{id}_E - u$ exprimée dans une base obtenue en concaténant une base de $\langle x\rangle$ et une base de F est triangulaire supérieure par blocs, le premier bloc correspondant à $\lambda \mathrm{id}_{\langle x\rangle} - u_{|\langle x\rangle}$ d'où le résultat.

   b. On a $\langle x\rangle \simeq \mathbf{k}[t]/(P_x)$, l'action de u à gauche correspondant à la multiplication par t à droite. D'après l'exercice 3, P_x est le polynôme caractéristique de $u_{|\langle x\rangle}$. Si Q est le polynôme caractéristique de u, alors Q est un multiple de P_x donc $Q \in I_x$, c'est-à-dire que $Q(u)(x) = 0$. Ceci étant vrai pour tout x, $Q(u) = 0$.

Exercice 6

On conserve les notations de l'exercice 5. On fixe un élément x de E tel que $I_x = (P)$, et on pose $N = \deg P$.

1. *a.* Cf. Exercice 3 Q1a.

   b. On exprime $\varphi \circ u^i$ dans la base duale. Comme $\varphi \circ u^i(u^j(x)) = 0$ si $i + j < n - 1$ et $\varphi \circ u^i(u^j(x)) = 1$ si $i + j = n - 1$, la matrice de la famille $(\varphi, \varphi \circ u, \ldots, \varphi \circ u^{N-1})$ dans la base duale est de type triangulaire inférieure droite, avec une antidiagonale composée de 1, donc elle est inversible.

   c. On a $\cap_{i=0}^{N-1} \ker \psi \circ u^i \cap \langle x\rangle = \cap_{i=0}^{N-1} \varphi \circ u^i = 0$ par la question précédente, donc $\cap_{i=0}^{N-1} \ker \psi \circ u^i$ est un supplémentaire de $\langle x\rangle$. Reste à vérifier qu'il est stable. Si $x \in \cap_{i=0}^{N-1} \ker \psi \circ u^i$, alors $\psi \circ u^i(u(x)) = 0$ pour $i \leq N - 2$ et $\psi \circ u^{N-1}(u(x)) = \psi \circ u^N(x) = -\sum_{i=0}^{N-1} a_i \psi \circ u^i(x) = 0$.

2. ***a.*** On raisonne par récurrence sur la dimension de E On peut écrire $E = \langle x \rangle \oplus V$ où V est stable par u où $P_x = P$. Le polynôme P annule la restriction de u à V, donc le polynôme minimal de $u_{|V}$ divise P. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à V.

   b. D'après l'exercice 3, le polynôme caractéristique de u est le produit des P_{x_i}.