CORRIGÉ DE LA FEUILLE n° 4

Exercice 1

On applique le lemme des noyaux : si $P = \prod_i P_i^{r_i}$ est le polynôme minimal de u écrit sous forme factorisée, $E = \bigoplus_i \ker P_i^{r_i}(u)$.

Supposons que pour un entier i, $r_i \geq 2$. L'inclusion $\ker P_i^{r_i-1}(u) \subset \ker P_i^{r_i}(u)$ est stricte (si on avait égalité, par le lemme des noyaux, P/P_i annulerait u, ce qui est contradictoire avec le fait que P soit le polynome minimal de u). On considère alors $V = \ker P_i^{r_i-1}(u)$. Supposons que V admette un supplémentaire stable W dans E. En intersectant avec $\ker P_i^{r_i}(u)$, on obtient que $\ker P_i^{r_i}(u) = \ker P_i^{r_i-1}(u) \oplus (W \cap \ker P_i^{r_i}(u))$. Posons $W' = W \cap \ker P_i^{r_i}(u)$. Pour tout x de W', $P_i(u)(x) \in \ker P_i^{r_i}(u)$ donc $P_i(u)(x) = 0$. Mais alors $W' \subset \ker P_i(u) \subset \ker P_i^{r_i-1}(u)$ et on obtient une contradiction.

Supposons maintenant que tous les r_i sont égaux à un. Soit V un sous-espace stable de E. Le polynome minimal de $u_{|V}$ divise P. En appliquant le lemme des noyaux à $u_{|V}$, on voit que l'on peut écrire $V = \bigoplus_i V_i$ où chaque V_i est un sev (éventuellement trivial) de $\ker P_i(u)$. Ceci permet de se ramener au cas où le polynôme minimal de u est irréductible. Soit V un sous-espace stable de E et considérons un vecteur x hors de V. Soit $\langle x \rangle$ le plus petit sous-espace stable contenant x, c'est-à-dire l'ensemble des $Q(u)(x)$ pour Q parcourant $\mathbf{k}[t]$. Montrons que $\langle x \rangle \cap E = \{0\}$. Par contradiction, supposons qu'il existe Q tel que $Q(u)(x) \in V$. Si cet élément n'est pas nul, P ne divise pas Q donc P est premier avec Q. Il existe donc deux polynômes A et B tels que $AP + BQ = 1$. On en déduit $x = A(u)P(u)(x) + B(u)Q(u)(x) = B(u)(Q(u)(x))$ donc $x \in V$, ce qui est contradictoire.

Exercice 2

Rappelons comment procéder pour calculer la réduite de Jordan d'une matrice M en pratique. Je vous conseille de regarder le polycopié de Laurent Koelblen et Patrick Polo (spécialement la preuve du Thm 3.1.6), trouvable à l'url suivant : `https://webusers.imj-prg.fr/~patrick.polo/LM270/polyLM270-2013.pdf` pour comprendre la méthode.

Étape1 : On calcule le polynôme caractéristique de M. Ce polynôme doit être scindé pour que le calcul soit possible. On le met alors sous la forme $\prod_i (t-\lambda_i)^{m_i}$.

Étape 2 : Fixons i (la même procédure doit s'effectuer pour chaque i). On pose $N = M - \lambda_i \mathrm{I}_n$ et $m = m_i$. On commence par calculer des bases des noyaux successifs $\ker N, \ker N^2, \dots, \ker N^m$. On peut souvent déterminer les dimensions en utilisant plusieurs ingrédients : la dimension de $\ker N^m$ (c'est-à-dire la dimension du sous-espace caractéristique attaché E_{λ_i} attaché à λ_i) est la multiplicité algébrique m. De plus, la codimension de $\ker N^{i-1}$ dans $\ker N^i$ est une fonction décroissante de i, et tout supplémentaire de $\ker N^{i-1}$ dans $\ker N^i$ peut être obtenu en complétant l'image par N d'une base d'un supplémentaire de $\ker N^i$ dans $\ker N^{i+1}$.

Étape 3 : On part d'une base d'un supplémentaire de $\ker N^{m-1}$ dans $\ker N^m$. On prend alors son image par N que l'on complète en une base d'un supplémentaire de $\ker N^{m-2}$ dans $\ker N^{n-1}$. On recommence alors la procédure en prenant l'image de cette base par N.

On dessine le petit tableau indiqué dans la référence ci-dessus, ce qui permet de fournir la forme de Jordan et la base associée en prenant les colonnes du tableau de haut en bas (le nombre de colonnes est égal au nombre de blocs).

Pour la matrice donnée, calculons le polynôme caractéristique :

$$\begin{vmatrix} \lambda & -2 & 0 & 1 \\ 3 & \lambda-3 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1, L_4 \leftarrow L_4 - (\lambda-1)L_1$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 0 & 1 \\ 3-3\lambda & \lambda+3 & -1 & 0 \\ 2-2\lambda & 3 & \lambda-2 & 0 \\ -\lambda(\lambda-1) & 2\lambda-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3-3\lambda & \lambda+3 & -1 \\ 2-2\lambda & 3 & \lambda-2 \\ -\lambda(\lambda-1) & 2\lambda-1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1) \begin{vmatrix} 3 & \lambda+3 & -1 \\ 2 & 3 & \lambda-2 \\ \lambda & 2\lambda-1 & 0 \end{vmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + (\lambda-2)L_1$$

$$=(\lambda-1) \begin{vmatrix} 3 & \lambda+3 & -1 \\ 3\lambda-4 & \lambda^2+\lambda-3 & 0 \\ \lambda & 2\lambda-1 & 0 \end{vmatrix} = -(\lambda-1) \begin{vmatrix} 3\lambda-4 & \lambda^2+\lambda-3 \\ \lambda & 2\lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4)$$

On voit que 1 est racine du reste, on pose la division euclidienne :

$$\begin{array}{rrrr|l} \lambda^3 & -5\lambda^2 & +8\lambda & -4 & \lambda-1 \\ \cline{5-5} \lambda^3 & -\lambda^2 & & & \lambda^2-4\lambda+4 \\ \cline{1-4} & -4\lambda^2 & +8\lambda & -4 & \\ & -4\lambda^2 & +4\lambda & & \\ \cline{3-4} & & 4\lambda & -4 & \\ & & 4\lambda & -4 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

On obtient ainsi $(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$. On commence par les sous-espaces propres. On résout le système $MX = X$.

$$\begin{cases} 2y - t = x \\ -3x + 3y + z - 3t = y \\ -2x + y + 2z - 2t = z \\ -y + t = t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ t = -x \\ z = 0 \end{cases}$$

donc $\ker(M - \mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. On note ce vecteur v_1. On fait le même calcul pour la valeur propre 2 en résolvant le système $MX = 2X$. On obtient

$$\begin{cases} 2y - t = 2x \\ -3x + 3y + z - 3t = 2y \\ -2x + y + 2z - 2t = 2z \\ -y + t = 2t \end{cases} \iff \begin{cases} t = -y \\ 3y = 2x \\ 3z = x \end{cases}$$

donc $\ker(M - 2\mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. On note ce vecteur w_1. On sait que $\ker(M - \mathrm{I}_4)^2$ et $\ker(M - 2\mathrm{I}_4)^2$ sont de dimension 2 (car les deux sous-espaces caractéristiques sont de dimension 2). Posons $Q = M - \mathrm{I}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour déterminer $\ker Q^2$, on cherche un vecteur X tel que $QX = v_1$. Ce vecteur fournira un supplémentaire de $\ker Q$ dans $\ker Q^2$. Ceci revient à résoudre

$$\begin{cases} -x+2y-t=1 \\ -3x+2y+z-3t=0 \\ -2x+y+z-2t=0 \\ -y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x+t=1 \\ z=1 \end{cases}$$

ce qui fournit par exemple le vecteur $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a donc en dessinant le petit tableau

$Q(v_2)$	base de $\ker Q$
v_2	base d'un supplémentaire de $\ker Q$ dans $\ker Q^2$

De même, en posant $R = M - 2\mathrm{I}_4 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, on cherche un vecteur X tel que $RX = w_1$. Ceci s'écrit

$$\begin{cases} -2x+2y-t=3 \\ -3x+y+z-3t=2 \\ -2x+y-2t=1 \\ -y-t=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-t \\ -2x-3t=-1 \\ -3x+z-4t=0 \end{cases}$$

ce qui fournit par exemple le vecteur $w_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$. D'où le tableau

$Q(w_2)$	base de $\ker R$
w_2	base d'un supplémentaire de $\ker R$ dans $\ker R^2$

Dans la base (v_1, v_2, w_1, w_2), la matrice M est donc égale à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On passe à la seconde matrice $M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Alors

$$\det(\lambda \mathrm{I}_4 - M) = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 & -3 & -4 \\ -1 & \lambda+4 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & \lambda+3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 \\ -1 & \lambda+4 \end{vmatrix} \times (\lambda+3)^2 = (\lambda+3)^4.$$

La matrice M possède donc une seule valeur propre, -3. On pose $N = M + 3\mathrm{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, N est nilpotente. On voit que N est de rang 2, son noyau est donc de dimension 2, engendré par les vecteurs $e_1 + e_2$ et $e_1 + e_3 - e_4$. $\mathrm{Im} N = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et sur $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, N est de rang 1. On en déduit que N^2 est de rang 1 (avec image engendrée par $e_1 + e_2$) donc $\ker N^2$ est de dimension 3, et $N^3 = 0$. On voir que pour obtenir un vecteur de base manquant dans $\ker N^2$, il suffit de prendre un X tel que $NX \in \ker N$, par exemple $X = e_1$. On a donc $\ker N^2 = \mathrm{Vect}(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_3 - e_4) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3 - e_4)$. Du coup e_3 est un supplémentaire de $\ker N^2$ dans $\mathbb{R}^4$. $Ne_3 = 3e_1 + 5e_2$ est un supplémentaire de $\ker N$ dans $\ker N^2$. Enfin, $N^2(e_3) = -2e_1 - 2e_2$ est un vecteur de $\ker N$, que l'on peut compléter par exemple avec le vecteur $e_1 + e_3 - e_4$. Le tableau que l'on obtient est donc le suivant :

$N^2(e_3)$	$e_1 + e_3 - e_4$	base de $\ker N$
$N(e_3)$		base d'un supplémentaire de $\ker N$ dans $\ker N^2$
e_3		base d'un supplémentaire de $\ker N^2$ dans $\ker N^3$

Dans la base $N^2(e_3), N(e_3), e_3, e_1 + e_3 - e_4$, la matrice de M est donc $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Soit λ_i une valeur propre de l'endomorphisme u et m_i la multiplicité algébrique de λ_i. Le sous-espace caractéristique associé est de dimension m_i, et les blocs de Jordan apparaissant forment une partition de m_i. Sur un bloc de taille k, $(u - \lambda_i \mathrm{Id})^k = 0$. On en déduit que le polynôme minimal de u sur ce sous-espace caractéristique est $(X - \lambda_i)^\ell$ où ℓ est la taille du plus grand bloc de Jordan. Ceci montre que si le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique, il n'y a qu'un seule bloc de Jordan (de taille maximale) par valeur propre. Réciproquement, supposons qu'on ne dispose que d'une bloc de Jordan par valeur propre. Si jamais le polynôme minimal divise strictement le polynôme caractéristique, le lemme des noyaux fournit l'existence d'un λ_i tel que le sous espace caractéristique associé soit $\ker(u - \lambda_i \mathrm{Id})^k$ pour $k < m_i$. Mais alors sur ce sous-espace caractéristique $u - \lambda_i$ est nilpotent d'ordre $< m_i$, ce qui est contradictoire avec le fait que c'est un bloc de Jordan de taille m.

Exercice 4

Soit A une matrice et $D + N$ sa décomposition de Dunford. Si D est inversible, alors $AD^{-1} = \mathrm{Id} + ND^{-1}$. Or N et D commutent, donc ND^{-1} est nilpotente donc $\mathrm{Id} + ND^{-1}$ est inversible. On en déduit que AD^{-1} est inversible donc D est inversible. Réciproquement supposons D non inversible. Alors $\ker D$ est un sous-espace vectoriel non nul stable par N (car D et N commutent). Comme $A = N$ sur $\ker D$, A est nilpotente sur $\ker D$ donc non inversible.

Exercice 5

L'ensemble des polynômes en u est un sev de $\mathrm{End}(u)$ (qui est de dimension finie), donc c'est un fermé. Or $\exp(u)$ s'écrit comme limite de polynômes en u. En combinant ces deux éléments, $\exp(u)$ est un polynôme en u.

Exercice 6

1. ***a.*** Soit $P(t) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} t^k / k$. Alors $P'(t) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} t^{k-1}$ est un inverse de $1 + t$ dans $\mathbb{Q}[t]/t^{n-1}$. Le polynôme $f(t) = \exp(P(t))$ satisfait donc $f'(t)(1 + t) = f(t)$ modulo t^{n-1}. Si $f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, on obtient alors $a_k = (k + 1)a_{k+1} + k a_k$ pour $k < n$, soit $(1 - k)a_k = (k + 1)a_{k+1}$. On en déduit $a_0 = a_1$ puis $a_2 = 0$ et par suite tous les autres a_i nuls. Ceci montre que $f(t) = a_0(1 + t)$ dans $\mathbb{Q}[t]/t^{n-1}$, et on voit immédiatement que $a_0 = 1$. Ceci étant vrai pour tout n, on obtient le résultat.

b. Pour n égal à l'indice de nilpotence de u, on a un morphisme d'algèbres $\mathbb{Q}[t]/t^n \to \mathbf{k}[u]$ obtenu en envoyant t sur u. L'image de $\sum_{k \geq 1} t^k / k$ étant égal à v, $\exp(v)$ est donc l'image de $1 + t$, à savoir $\mathrm{id} + u$.

c. On commence par démontrer l'identité inverse, à savoir $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}(e^t-1)^k}{k} = t$ dans $\mathbb{Q}[t]/t^n$. En appelant $f(t)$ cette expression, $f'(t) = e^t \sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}(e^t-1)^k$ et la dernière somme est inverse de e^t. On a ainsi $f'(t) = 1$ donc $f(t) = a_0 + t$ modulo t^{n-1}. Comme $a_0 = 0$, on obtient l'identité dans tous les $\mathbb{Q}[t]/t^n$, puis dans $\mathbf{k}[u]$. On voit alors que l' application

$$f \to \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}(f-1)^k}{k}$$

qui va des matrices unipotentes vers les matrices unipotentes, est inverse de l'exponentielle.

2. ***a.*** Pour $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on prend sa décomposition de Dunford $M = D + N$. Alors D est inversible, on peut donc choisir une matrice diagonale D' telle que $\exp(D') = D$ en prenant des logarithmes des coefficients. En choisissant un polynôme d'interpolation de Lagrange adéquat envoyant chacune des valeurs propres sur un logarithme, on peut choisir D' comme un polynôme en D. D'autre part, on peut écrire $Id + D^{-1}N = \exp N'$ où N' est nilpotente et est un polynôme en $D^{-1}N$, donc en M (car D^{-1} est un polynôme en D). On en déduit que N' et D' commutent donc $\exp(D' + N') = \exp(D')\exp(N') = D(\mathrm{Id} + D^{-1}N) = D + N = M$.

b. La construction précédente permet de construire B comme un polynôme en A (car les termes de la décomposition de Dunford sont des polynômes en l'endomorphisme initial). Cependant ce n'est pas toujours possible. La matrice $\begin{pmatrix} 2\mathbf{i}\pi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est d'exponentielle l'identité, mais n'est pas dans $\mathbb{C}[\mathrm{I}_2]$.