Préparation à l'agrégagion - TD d'algèbre
Julien Grivaux 20 septembre 2021

FEUILLE n° 1 : GROUPES ABÉLIENS

Exercice 1

Soient a et b deux entiers relatifs.

1. Décrire le sous-groupe de $\mathbb{Z}$ $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.

2. Décrire le sous-groupe de $\mathbb{Z}$ engendré par a et b.

Exercice 2

Soit n un entier strictement positif et d un entier dans $[\![0, n-1]\!]$.

1. Calculer l'ordre du sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ engendré par d.

2. Montrer que l'application $f \mapsto f(1)$ est une bijection entre l'espace des morphismes de groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans lui-même et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Décrire l'opération de composition des morphismes via cette bijection.

3. En déduire que le groupe des automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

Exercice 3

1. Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}$. On pose $\alpha = \inf\{x \in G, x > 0\}$.

a. On suppose $\alpha > 0$. Démontrer que $G = \alpha\mathbb{Z}$.

b. Si $\alpha = 0$, démontrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

2. ***a.*** Soient a et b deux nombres réels et $G_{a,b}$ le groupe engendré par a et b. Établir que $G_{a,b}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si a et b sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

b. Soit $\mathbb{U}$ le groupe des nombres complexes de module 1. Établir que tout sous-groupe de $\mathbb{U}$ est soit fini, soit dense.

c. Est-il possible de trouver un sous-groupe dense de $\mathbb{U}$ dont tout élément est d'ordre fini ?

Exercice 4

1. Soit G un groupe abélien fini, $n = \#G$ et $d = \sup_{x \in G} \mathrm{ord}(x)$.

a. Montrer que d est un diviseur de n.

b. Soit y un élémént de G d'ordre premier. Montrer que $\mathrm{ord}(y)$ divise d (on pourra raisonner par l'absurde).

c. Même question avec un élément y de G d'ordre quelconque.

d. En déduire que $d = \mathrm{ppcm}_{x \in G} \mathrm{ord}(x)$, c'est-à-dire que d est l'exposant de G.

2. Soit $\mathbf{k}$ un corps commutatif et G un sous-groupe fini de $\mathbf{k}^\times$. En étudiant le polynôme $X^d - 1$, démontrer que G est cyclique.

Exercice 5

Cet exercice s'appuie sur les résultats de l'exercice 4. On fixe un nombre premier $p \geq 3$ ainsi qu'un entier $N \geq 2$. Le but est d'explorer un peu l'anneau $\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z}$, puis de montrer que le groupe de ses inversibles est cyclique.

1. ***a.*** Quels sont les éléments inversibles dans $\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z}$, et combien y en a-t-il ?
   b. Montrer que le morphisme $f : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z})^\times$ défini par $f(x) = 1 + xp^{N-1}$ est un morphisme de groupes.
   c. En déduire que $1 + p^{N-1}$ est d'ordre p dans $(\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z})^\times$.
2. On va maintenant raffiner la construction précédente pour construire des éléments dont l'ordre est une puissance de p.
   a. Démontrer que pour tout entier $k \geq 0$, $(1 + p)^{p^k} = 1 + p^{k+1}$ modulo p^{k+2}.
   b. En déduire que $1 + p$ est d'ordre p^{N-1} dans $(\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z})^\times$.
3. On rappelle que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est cyclique (cf. Ex 4-2).
   a. Montrer que l'on a un morphisme de groupes naturel $(\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$.
   b. En déduire qu'il existe dans $(\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z})^\times$ un élément dont l'ordre est un multiple de $p - 1$.
4. ***a.*** En utilisant l'exercice 4, montrer que $(\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z})^\times$ est d'exposant $p^N - p^{N-1}$.
   b. En déduire en utilisant l'exercice 4 que $(\mathbb{Z}/p^N\mathbb{Z})^\times$ est cyclique.
5. Que peut-on dire dans le cas $p = 2$?

Exercice 6

Soit G un groupe fini, $\widehat{G}$ l'ensemble des caractères de G, et E l'espace vectoriel des fonctions de G dans $\mathbb{C}$. Une fonction f dans E est dite centrale si pour tout éléments g, h de E, $f(ghg^{-1}) = f(h)$.

1. ***a.*** Rappeler pourquoi $\widehat{G}$ est fini.
   b. Établir que les éléments de $\widehat{G}$ forment une famille libre de E.
   c. En déduire que $\#\widehat{G} \leq \#G$.
2. On suppose dans cette question que $\#\widehat{G} = \#G$.
   a. Démontrer que toute fonction dans E est centrale.
   b. En déduire que G est un groupe abélien.
3. On suppose maintenant que G est abélien. Pour tout g de G on définit un endomorphisme L_g de E par $L_g(f)(x) = f(gx)$.
   a. Vérifier que les endomorphismes L_g commutent entre eux et sont d'ordre fini.
   b. En déduire qu'ils sont simultanément diagonalisables.
   c. Vérifier que tout vecteur propre commun des L_g est proportionnel à un caractère de G.
   d. En déduire $\#G = \#\widehat{G}$.

Exercice 7

On fixe un groupe abélien fini G d'exposant d. Soit $x \in G$ tel que $\mathrm{ord}(x) = d$, et H un sous-groupe maximal de G tel que $H \cap \langle x \rangle = \{e\}$. On pose $G' = G/H$ et $G'' = G'/\langle x \rangle$. Pour tout élément y dans G, on note $\bar{y}$ sa classe dans G', et $\bar{\bar{y}}$ sa classe dans G''.

1. ***a.*** Vérifier que $\bar{x}$ est d'ordre d.
   b. On fixe g dans $G \setminus H$. Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $\bar{g}^k \in \langle \bar{x} \rangle$ et $\bar{g}^k \neq e$.
   c. Montrer que $m = \mathrm{ord}(\bar{\bar{g}})$ satisfait la condition précédente, puis que m est un diviseur de $\mathrm{ord}(\bar{g})$.
   d. En utilisant l'exercice 4-1, établir que $\bar{g}^m = \overline{x}^i$ où m divise i.
   e. En déduire que $\overline{g} \in \langle \bar{x} \rangle$.
2. ***a.*** Démontrer que la multiplication $H \times \langle x \rangle \to G$ est un isomorphisme de groupes.
   b. En déduire que G est isomorphe à un produit $\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$ où $d_1 | d_2 \ldots | d_n$.