FEUILLE n° 3 : ALGÈBRE LINÉAIRE

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $p \in [\![0, n]\!]$, on note M_p l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de rang p.

1. ***a.*** Démontrer que M_n est un ouvert comportant deux composantes connexes par arcs.

b. Démontrer que M_p est connexe par arcs si $p \leq n-1$.

2. ***a.*** Pour tout p, démontrer que $\cup_{q \geq p} M_q$ est ouvert.

b. Pour tout p, démontrer que $\overline{M}_p = \cup_{q \leq p} M_q$.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbf{k}$ et $u_1, \ldots u_d$ des formes linéaires sur E. Soit $F = \cap_{i=1}^{d} \ker u_i$.

1. Démontrer que $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_d) = \{u \in E^*, u_{|F} = 0\}$.

2. En déduire que si E est de dimension finie, $\dim \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_d) + \dim F = \dim E$.

Exercice 3

Soit $P \in \mathbf{k}[t]$ un polynôme non nul de degré N, et $E = \mathbf{k}[t]/(P)$ où (P) est l'idéal engendré par P.

1. ***a.*** Démontrer que E est un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension N et expliciter une base naturelle de E.

b. Vérifier que la multiplication par t induit un endomorphisme de E, que l'on notera m_t.

c. Démontrer que le polynôme minimal de m_t est égal à P.

2. ***a.*** Expliciter la matrice de m_t.

b. En déduire que le polynôme caractéristique de m_t est égal à P.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbf{k}$ et u un endomorphisme de E.

1. Si $P, Q \in \mathbf{k}[t]$ sont deux polynômes premiers entre eux, démontrer que $\ker PQ(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$.

2. Généraliser à un nombre arbitraire de polynômes.

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel de dimension finie d sur un corps $\mathbf{k}$, et u un endomorphisme de E, et P son polynôme minimal. Pour x non nul dans E, on définit :

$$\langle x \rangle = \{Q(u)(x), Q \in \mathbf{k}[t]\}$$
$$I_x = \{Q \in \mathbf{k}[x], Q(u)(x) = 0\}$$

1. ***a.*** Vérifier que $\langle x \rangle$ est stable par u et que I_x est un idéal de $\mathbf{k}[t]$.

b. Si $I_x = (P_x)$, démontrer que $\dim\langle x \rangle = \deg P_x$.

2. ***a.*** Établir que P_x divise P.

b. Soit $P = \displaystyle\prod_i P_i^{r_i}$ la décomposition en facteurs irréductibles de P. En utilisant l'exercice 4, démontrer que pour tout i il existe un x_i tel que $I_{x_i} = (P_i^{r_i})$.

c. En déduire qu'il existe un x dans E tel que $I_x = (P)$.

d. Faire le parallèle avec des énoncés similaires sur les groupes abéliens finis.

3. ***a.*** Démontrer que le polynôme caractéristique de $u_{|\langle x \rangle}$ divise le polynôme caractéristique de u.

b. En utilisant l'exercice 3, déduire le théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 6

On conserve les notations de l'exercice 4. On fixe un élément x de E tel que $P_x = P$, on pose $N = \deg P$.

1. ***a.*** Démontrer que $(x, u(x), \dots, u^{N-1}(x))$ est une base de $\langle x \rangle$.

   b. Soit φ la forme linéaire sur $\langle x \rangle$ définie par $\varphi(u^i(x))) = \delta_{i,N-1}$. Vérifier que $(\varphi, \varphi \circ u, \dots, \varphi \circ u^{N-1})$ forme une base de $\langle x \rangle^*$.

   c. Si ψ est une extension quelconque de φ à E, démontrer que $\cap_{i=0}^{N-1} \ker \psi \circ u^i$ est un sous-espace supplémentaire stable de $\langle x \rangle$.

2. ***a.*** Démontrer qu'il existe des éléments $x_1, \dots, x_r$ de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} \langle x_i \rangle$ et $P_{x_1} | P_{x_2} | \dots | P_{x_r}$.

   b. Quel est le polynôme caractéristique de u ?