FEUILLE n° 4 : ALGÈBRE LINÉAIRE (SUITE) : RÉDUCTION DE JORDAN ET EXPONENTIELLE

Exercice 1

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie sur un corps $\mathbf{k}$. Démontrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- Tout sous-espace vectoriel de E stable par u admet un supplémentaire stable.
- La factorisation du polynôme minimal ne contient que des facteurs irréductibles de multiplicité 1.

Exercice 2

Calculer une base de $\mathbb{R}^4$ permettant de mettre la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sous forme de Jordan. Même question pour la matrice $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Expliciter la réduite de Jordan d'un endomorphisme de $\mathbb{C}^N$ dont le polynôme caractéristique est égal au polynôme minimal.

Exercice 4

Soit $\mathbf{k}$ un corps, $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{k})$, et $A = D + N$ sa décomposition de Dunford. Démontrer que A est inversible si et seulement si D l'est.

Exercice 5

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{k})$ avec $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Démontrer que $\exp(A)$ est un polynôme en A.

Exercice 6

1. Soit u un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbf{k}$ de caractéristique 0. On pose $v = \displaystyle\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1} u^k}{k}$.

- ***a.*** Démontrer l'identité $\exp\left(\displaystyle\sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} t^k / k\right) = 1 + t$ dans $\mathbb{Q}[t]/t^n$.
- ***b.*** En déduire $\exp(v) = \mathrm{Id} + u$.
- ***c.*** Démontrer en utilisant la même technique que l'exponentielle réalise une bijection entre les endomorphismes nilpotents et les endomorphismes unipotents (par définition, unipotent = identité + nilpotent).

2. ***a.*** Démontrer que $\exp\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective. Est-elle injective ?

- ***b.*** Étant donné $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, peut-on choisir $B \in \mathbb{C}[A]$ tel que $\exp(B) = A$? A-t-on $B \in \mathbb{C}[A]$ pour toutes les solutions possibles B ?